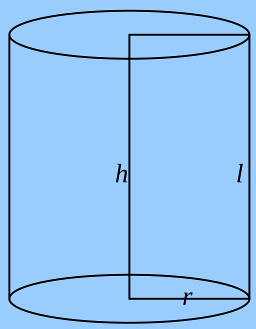
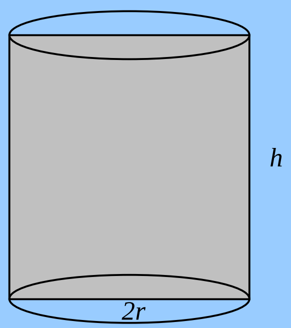
11. 3.BRYŁY OBROTOWE

Walec – bryła obrotowa powstała w wyniku obrotu prostokąta dokoła prostej zawierającej jeden z jego boków

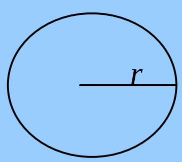


r – promień podstawy walca
h – wysokość walca
l – tworząca walca $l = h$

Przekrój osiowy walca – prostokąt o bokach h i $2r$

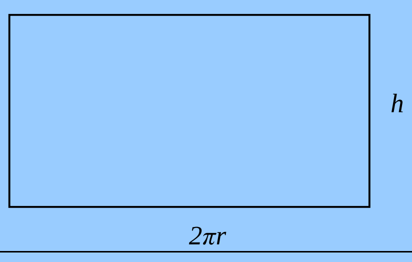


Podstawa walca - koło o promieniu r



$$P_p = \pi \cdot r^2$$

Powierzchnia boczna walca – prostokąt o bokach h i $2\pi r$

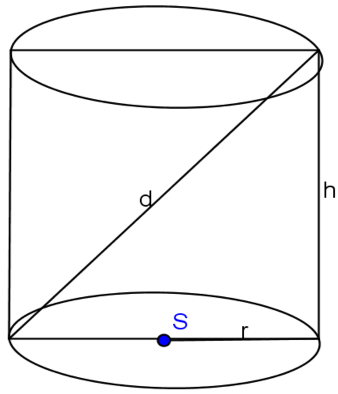


$$P_b = 2\pi \cdot r \cdot h$$

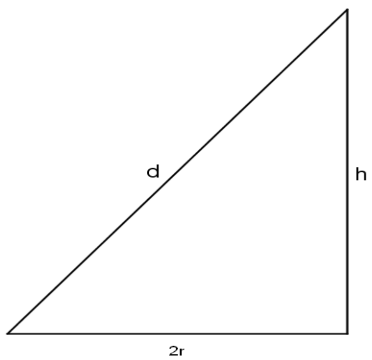
Wzór na pole powierzchni całkowitej walca: $P_c = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h$

Wzór na objętość walca: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

<u>Przykład 11.3.1.</u> . Przekątna przekroju osiowego walca ma długość 8. Pole powierzchni bocznej walca jest czterokrotnie większe od pola jego podstawy.
Oblicz objętość walca.

<table>
<tr><th>Rozwiązanie</th><th>Komentarz</th></tr>
<tr><td>


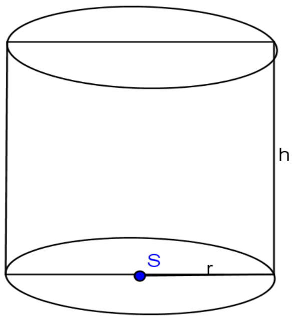
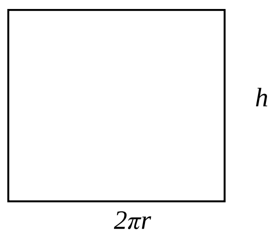
Dane:
$d = 8$
$P_b = 4 \cdot P_p$
Szukane:
$V = ?$
Wzory:
$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$
$P_b = 2\pi \cdot r \cdot h$
$P_p = \pi \cdot r^2$
</td><td>Analiza zadania.</td></tr>
<tr><td>
$P_b = 4 \cdot P_p$
$2\pi \cdot r \cdot h = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \; / : 2\pi \cdot r$
$h = 2r$
</td><td>Układamy równanie z niewiadomymi r i h.

Obie strony równania możemy podzielić przez r , bo $r > 0$</td></tr>
<tr><td>


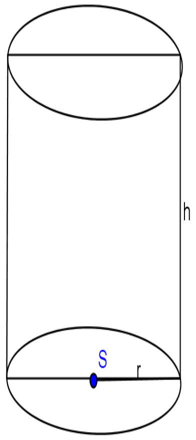
$h^2 + (2r)^2 = d^2$
$h^2 + 4r^2 = 64$
</td><td>Wykorzystując twierdzenia Pitagorasa układamy drugie równanie z niewiadomymi r i h.</td></tr>
<tr><td>
$\begin{cases} h = 2r \\ h^2 + 4r^2 = 64 \end{cases}$
</td><td>Budujemy układ równań z niewiadomymi
r i h.
Układ rozwiązujemy metodą podstawiania.</td></tr>
</table>

$(2r)^2 + 4r^2 = 64$ $4r^2 + 4r^2 = 64$ $8r^2 = 64 / : 8$ $r^2 = 8$ $r = 2\sqrt{2}$ $h = 2r = 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$	Obliczamy *h*
$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi\left(2\sqrt{2}\right)^2 \cdot 4\sqrt{2} = \pi \cdot 8 \cdot 4\sqrt{2} = 32\sqrt{2}\pi$	Obliczamy V

<u>Przykład 11.3.2.</u> Objętość walca jest równa 16π , a jego powierzchnia boczna po rozwinięciu jest kwadratem . Oblicz wysokość walca

Rozwiązanie	**Komentarz**
 Powierzchnia boczna walca  **Dane:** **Szukane:** **Wzory:** $V = 16\pi$ h $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ $h = 2\pi \cdot r$	Analiza zadania. Powierzchnia boczna walca jest kwadratem , zatem $h = 2\pi \cdot r$
$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ $16\pi = \pi \cdot r^2 \cdot 2\pi \cdot r$ $16\pi = 2\pi^2 \cdot r^3 / : 2\pi^2$ $r^3 = \frac{16\pi}{2\pi^2}$ $r^3 = \frac{8}{\pi}$ $r = \frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$	Obliczamy promień walca *r*
$h = 2\pi \cdot r = 2\pi \cdot \frac{2}{\sqrt[3]{\pi}} = \frac{4\sqrt[3]{\pi^3}}{\sqrt[3]{\pi}} = 4\sqrt[3]{\pi^2}$	Obliczamy wysokość walca *h*

Przykład 11.3.3. Oblicz ile waży 100m miedzianego drutu o średnicy 2 mm , jeżeli ciężar właściwy miedzi jest równy $8{,}96\frac{g}{cm^3}$. Wynik podaj w kg z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

<table>
<tr><th>Rozwiązanie</th><th>Komentarz</th></tr>
<tr><td>


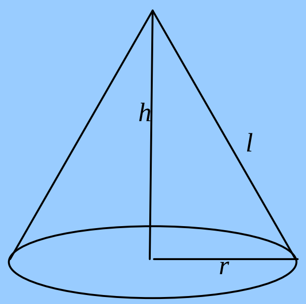
Dane: Szukane: $m=?$
$h=100m=100000mm$
$2r=2mm$
$\rho=8{,}96\frac{g}{cm^3}=8{,}96\frac{0{,}001kg}{(10mm)^3}=8{,}96\frac{0{,}001kg}{1000mm^3}=$
$=0{,}00000896\frac{kg}{mm^3}$
Wzory:
$\rho=\frac{m}{V}$
$V=\pi r^2\cdot h$
</td><td>
Analiza zadania.

Drut , o którym mowa w zadaniu jest walcem.

W zadaniu należy pamiętać o zamianie jednostek.

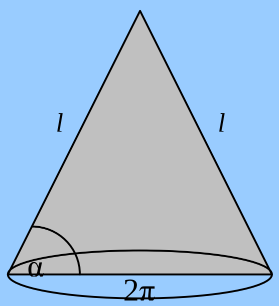
W zdaniu wykorzystamy wzór na ciężar właściwy. Wzór ten można napisać na podstawie podanej jednostki: $\frac{g}{cm^3}$,
gdzie g jest jednostką masy m, natomiast cm^3 jednostką objętości V
Stąd ciężar właściwy wyraża się wzorem
$\rho=\frac{m}{V}$
</td></tr>
<tr><td>
$\rho=\frac{m}{V}$
$0{,}00000896=\frac{m}{\pi r^2\cdot h}$
$0{,}00000896=\frac{m}{3{,}14\cdot 1^2\cdot 100000}$
$0{,}00000896=\frac{m}{314000}\ /\cdot 314000$
$m\approx 2{,}8$
</td><td>
Obliczamy masę drutu m
</td></tr>
</table>

Stożek – bryła obrotowa powstała w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego dokoła jednej z przyprostokątnych



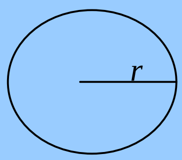
r – promień podstawy stożka
h – wysokość stożka
l – tworząca stożka

Przekrój osiowy stożka – trójkąt równoramienny o podstawie $2r$ i ramieniu l



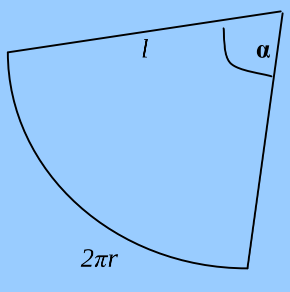
α – kąt rozwarcia stożka
β – kat nachylenia tworzącej do płaszczyzny podstawy

Podstawa stożka - koło o promieniu r



$$P_p = \pi \cdot r^2$$

Powierzchnia boczna stożka – wycinek koła o promieniu l , oparty na łuku długości $2\pi r$



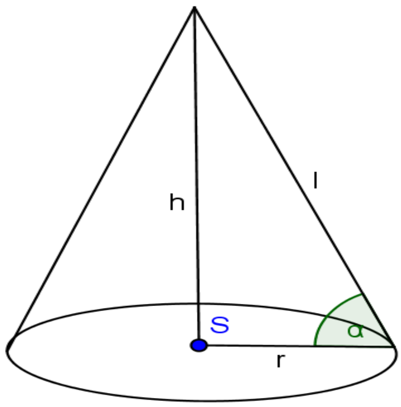
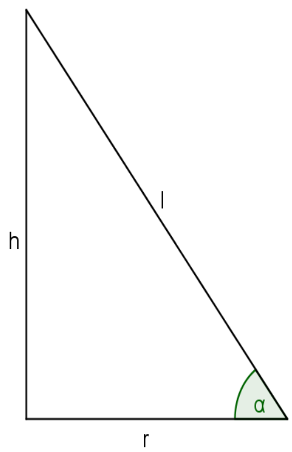
$$P_b = \pi \cdot r \cdot l$$

$$P_b = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi \cdot l^2$$

Wzór na pole powierzchni całkowitej stożka $P_c = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot l$

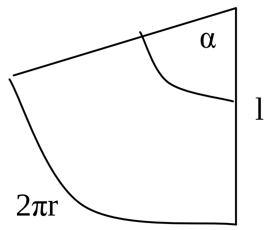
Wzór na objętość stożka $V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$

<u>Przykład 11.3.4.</u> Oblicz objętość stożka , jeżeli jego tworząca długości 16 tworzy z podstawą kąt 60 ° .

Rozwiązanie	Komentarz
 **Dane:** **Szukane:** **Wzory:** $l = 16$ $V = ?$ $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$ $\alpha = 60°$	Analiza zadania.
 $\sin\alpha = \frac{h}{l}$ $\sin 60° = \frac{h}{16}$ $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{16}$ $2h = 16\sqrt{3} \, / : 2$ $h = 8\sqrt{3}$	Obliczamy wysokość h , korzystając z definicji sinusa: $\sin\alpha = \frac{przyprostokatna\_naprzeciw\_\alpha}{przeciwprostokatna}$

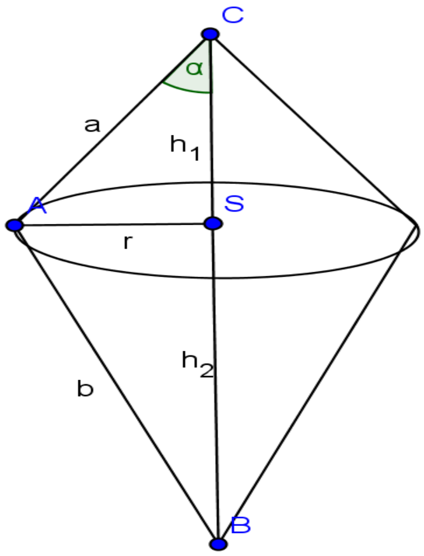
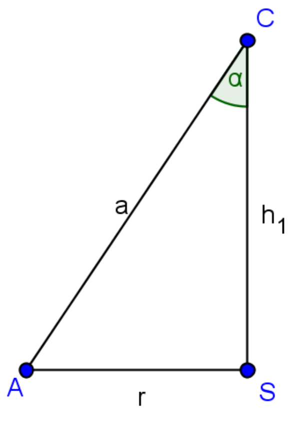
$h^2+r^2=l^2$ $(8\sqrt{3})^2+r^2=16^2$ $64\cdot 3+r^2=256$ $r^2=256-192$ $r^2=64$ $r=8$	Obliczamy promień r, korzystając z twierdzenia Pitagorasa.
$V=\frac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot h$ $V=\frac{1}{3}\pi\cdot 8^2\cdot 8\sqrt{3}=\frac{512\sqrt{3}\pi}{3}$	Obliczmy objętość stożka.

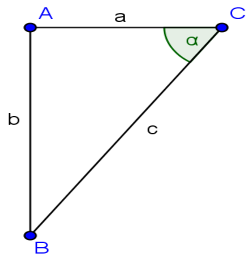
<u>Przykład 11.3.5.</u> Powierzchnią boczną stożka jest wycinek koła o kącie 240 ° i promieniu 12. Oblicz pole podstawy stożka.

Rozwiązanie	**Komentarz**
 **Dane:** $\alpha=240°$, $l=12$ **Szukane:** $P_p=?$ **Wzory:** $P_p=\pi\cdot r^2$ $P_b=\pi\cdot r\cdot l$ $P_b=\frac{\alpha}{360°}\pi\cdot l^2$	Analiza zadania. Wzór na pole powierzchni bocznej stożka: $P_b=\frac{\alpha}{360°}\pi\cdot l^2$ jest to znany nam wzór na pole wycinka koła. Wykażemy, że pole powierzchni bocznej stożka wyraża się wzorem $P_b=\pi\cdot r\cdot l$. Wycinek koła, który jest powierzchnią boczną stożka jest oparty na łuku $2\pi r$. Wykorzystamy znany nam wzór na długość łuku i zapiszemy równanie: $2\pi\cdot r=\frac{\alpha}{360°}2\pi\cdot l\,/:2$ $\pi\cdot r=\frac{\alpha}{360°}\pi\cdot l\,/\cdot l$ $\pi\cdot rl=\frac{\alpha}{360°}\pi\cdot l^2$ $\pi\cdot r\cdot l=P_b$
$P_b=\frac{\alpha}{360°}\pi\cdot l^2$ $P_b=\frac{240°}{360°}\pi\cdot 12^2=\frac{2}{3}\pi\cdot 144=96\pi$	Obliczamy pole powierzchni bocznej stożka.
$P_b=\pi\cdot r\cdot l$ $96\pi=\pi\cdot r\cdot 12\,/:12\pi$ $r=8$	Obliczamy promień r stożka

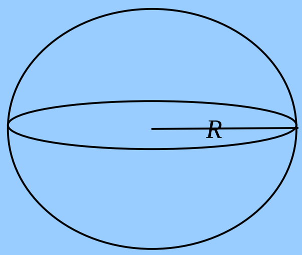
$P_p = \pi \cdot r^2$ $P_p = \pi \cdot 8^2 = 64\pi$	Obliczamy pole podstawy stożka

Przykład 11.3.6. Jedna z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego ma długość 2 i tworzy z przeciwprostokątną kąt $60°$. Oblicz pole powierzchni i objętość bryły powstałej z obrotu trójkąta wokół prostej zawierającej przeciwprostokątną.

Rozwiązanie	**Komentarz**
 **Dane :** $a = 2$ $\alpha = 60°$ **Szukane:** $V = ?$ $P_c = ?$ **Wzory:** $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h_1 + \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h_2$ $P_c = \pi \cdot r \cdot a + \pi \cdot b \cdot r$	Analiza zadania. Trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym, w którym kąt BAC ma miarę $90°$. W wyniku obrotu tego trójkąta dookoła przeciwprostokątnej otrzymujemy dwa stożki mające wspólną podstawę. Objętością powstałej bryły jest suma objętości stożków. Pole powierzchni powstałej bryły jest suma pól powierzchni bocznych stożków.
	Obliczamy r , korzystając z definicji sinusa: $\sin\alpha = \frac{przyprostokatna\_naprzeciw\_\alpha}{przeciwprostokatna}$

$\sin\alpha = \frac{r}{a}$ $\sin 60° = \frac{r}{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{r}{2}$ $2r = 2\sqrt{3} \,/ : 2$ $r = \sqrt{3}$	
${h_1}^2 + r^2 = a^2$ ${h_1}^2 + \sqrt{3}^2 = 2^2$ ${h_1}^2 = 4 - 3$ $h_1 = 1$	Obliczamy h_1 , korzystając z twierdzenia Pitagorasa.
 $tg\alpha = \frac{b}{a}$ $tg60° = \frac{b}{2}$ $\sqrt{3} = \frac{b}{2} / \cdot 2$ $b = 2\sqrt{3}$	Obliczamy b , korzystają z definicji tangensa: $tg\alpha = \frac{przyprostokatna\_naprzeciw\_\alpha}{przyprostokatna\_przy\_\alpha}$ $c = h_1 + h_2$
$a^2 + b^2 = c^2$ $2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 = c^2$ $4 + 4 \cdot 3 = c^2$ $c = 4$ $4 = 1 + h_2$ $h_2 = 3$	Obliczamy h_2 , korzystając z twierdzenia Pitagorasa. Wykorzystujemy równość $c = h_1 + h_2$
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h_1 + \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h_2$ $V = \frac{1}{3}\pi \cdot \sqrt{3}^2 \cdot 1 + \frac{1}{3}\pi \cdot \sqrt{3}^2 \cdot 3 = \pi + 3\pi = 4\pi$ $P_c = \pi \cdot r \cdot a + \pi \cdot b \cdot r$ $P_c = \pi \cdot \sqrt{3} \cdot 2 + \pi \cdot \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\pi + 6\pi$	Obliczamy V i P_c

Kula – bryła obrotowa powstała w wyniku obrotu koła dokoła jego średnicy



R – promień kuli

Wzór na pole powierzchni kuli $P_c = 4\pi \cdot R^2$

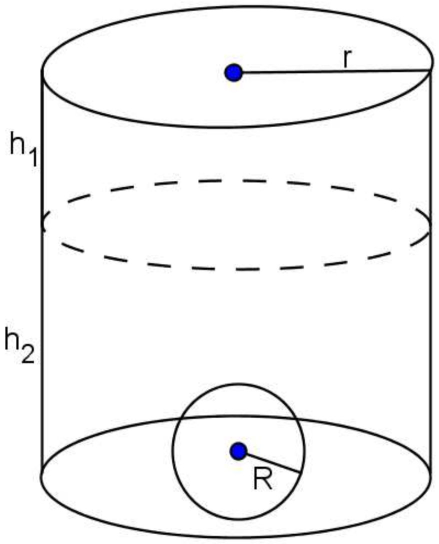
Wzór na objętość kuli: $V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$

Sfera – powierzchnia kuli
Koło wielkie – przekrój kuli płaszczyzną przechodzącą przez jej środek.

Przykład 11.3.7. Oblicz ile razy zwiększy się pole powierzchni kuli , a ile razy jej objętość jeżeli promień kuli wzrośnie trzykrotnie.

Rozwiązanie	Komentarz
Dane: $r_1 = 3r_2$ **Szukane:** $\frac{V_1}{V_2} = ?$, $\frac{P_{c1}}{P_{c2}} = ?$ **Wzory:** $V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot r_1^3$, $V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot r_2^3$, $P_{c1} = 4\pi \cdot r_1^2$, $P_{c2} = 4\pi \cdot r_2^2$	Analiza zadania.
$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot r_1^3}{\frac{4}{3}\pi \cdot r_2^3} = \frac{(3r_2)^3}{r_2^3} = \frac{27r_2^3}{r_2^3} = 27$ $\frac{P_{c1}}{P_{c2}} = \frac{4\pi \cdot r_1^2}{4\pi \cdot r_2^2} = \frac{(3r_2)^2}{r_2^2} = \frac{9r_2^2}{r_2^2} = 9$ **Odp.:** Objętość kuli zwiększyła się 27razy, a jej pole powierzchni 9 razy.	Obliczamy ile razy zwiększy objętość kuli. Obliczamy ile razy zwiększy pole powierzchni kuli.

Przykład 11.3.8. Do pojemnika w kształcie walca o średnicy 9 cm zawierającego pewną ilość wody , wrzucono kulę o promieniu 3cm. Oblicz , o ile milimetrów podniesie się poziom wody w naczyniu , wiedząc, że kula ta całkowicie zanurzyła się w wodzie.

Rozwiązanie	Komentarz
 **Dane:** $R = 3cm$, $2r = 9cm$ **Szukane:** $h_1 = ?$ **Wzory:** $V = V_1 + V_2$ $V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$ $V_2 = \pi \cdot r^2 \cdot h_2$ $V = \pi \cdot r^2 \cdot (h_1 + h_2)$	Analiza zadania. Po wrzuceniu kuli do pojemnika poziom wody podniósł się o h_1 V_2 - objętość wody w pojemniku V_1 - objętość kuli
$V = V_1 + V_2$ $\pi \cdot r^2 \cdot (h_1 + h_2) = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 + \pi \cdot r^2 \cdot h_2$ $\pi \cdot 4{,}5^2 \cdot (h_1 + h_2) = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 + \pi \cdot 4{,}5^2 \cdot h_2$ $20{,}25\pi \cdot h_1 + 20{,}25\pi \cdot h_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot 9 + 20{,}25\pi \cdot h_2$ $20{,}25\pi \cdot h_1 = 12\pi \; / : 20{,}25\pi$ $h_1 = \frac{16}{27} cm = \frac{160}{27} mm \approx 6mm$ **Odp.:** Poziom wody w naczyniu podniósł się o około 6 mm.	Obliczmy h_1

ĆWICZENIA

Ćwiczenie 11.3.1. (2pkt.) Oblicz objętość walca wiedząc, że jego przekrój osiowy jest kwadratem o boku długości $6cm$.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie promienia i wysokości walca.	1
2	Podanie objętości walca.	1

Ćwiczenie 11.3.2. (3pkt.) Przekątna przekroju osiowego walca $d = 12cm$ jest nachylona do podstawy pod kątem $\alpha = 45°$. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość walca.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie wysokości walca.	1
2	Podanie promienia walca.	1
3	Podanie pola powierzchni całkowitej walca.	1

Ćwiczenie 11.3.3. (2pkt.) Kąt rozwarcia stożka $\alpha = 60°$ i jego promień $r = 4cm$. Oblicz objętość stożka.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie wysokości stożka.	1
2	Podanie objętości stożka.	1

Ćwiczenie 11.3.4. (4pkt.) Oblicz pole powierzchni i objętość stożka , którego powierzchnią boczną jest wycinek koła o promieniu 6 i kącie $120°$.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie promienia stożka.	1
2	Podanie wysokości stożka	1
3	Podanie pola powierzchni stożka.	1
4	Podanie objętości stożka.	1

Ćwiczenie 11.3.5. (2pkt.) Kula o promieniu R i stożek mają równe objętości. Pole powierzchni bocznej stożka jest trzy razy większe od pola powierzchni jego podstawy. Znajdź wysokość stożka

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie promienia stożka.	1
2	Podanie wysokości stożka.	1